BLOQUE 1

1.A.- Dada la función $f(x)=1-x^2e^{-x^2}$, se pide:

i) Hallar las coordenadas de sus máximos y mínimos relativos **[1'5 puntos]**

ii) Calcula, si existe, la ecuación de la asíntota horizontal **[1 punto]**

$i)$

$$f'(x)=-\left[2xe^{-x^2}+(-2x)x^2e^{-x^2}\right]=-2xe^{-x^2}\left(1-x^2\right)=-2x\,(1-x)\,(1+x)\,e^{-x^2}\Rightarrow Crecimiento\Rightarrow f'(x)>0$$

$$-2x\,(1-x)\,(1+x)\,e^{-x^2}>0\Rightarrow\begin{cases}-2<0\Rightarrow\forall x\in\Re\\ x>0\\ 1-x>0\Rightarrow -x>-1\Rightarrow x<1\\ 1+x>0\Rightarrow x>-1\\ e^{-x^2}>0\Rightarrow\forall x\in\Re\end{cases}$$

	$-\infty$ a -1	-1 a 0	0 a 1	1 a ∞
-2 < 0	**(-)**	**(-)**	**(-)**	**(-)**
x > 0	**(-)**	**(-)**	**(+)**	**(+)**
x < 1	**(+)**	**(+)**	**(+)**	**(-)**
x > - 1	**(-)**	**(+)**	**(+)**	**(+)**
$e^{-x^2}>0$	**(+)**	**(+)**	**(+)**	**(+)**
Solución	**(-)**	**(+)**	**(-)**	**(+)**

Mínimo relativo en x = -1 $\Rightarrow f(-1)=1-(-1)^2e^{-(-1)^2}=1-e^{-1}=1-\frac{1}{e}=\frac{e-1}{e}$ (De decrecimiento pasa a crecimiento)

Máximo relativo en x = 0 $\Rightarrow f(0)=1-0^2\cdot e^{-0^2}=1-0\cdot 1=1$ (De crecimiento pasa a decrecimiento)

Mínimo relativo en x = 1 $\Rightarrow f(1)=1-1^2\cdot e^{-1^2}=1-e^{-1}=1-\frac{1}{e}=\frac{e-1}{e}$ (De decrecimiento pasa a crecimiento)

$ii)$

$$y=\lim_{x\to\infty}\left(1-x^2e^{-x^2}\right)=\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{x^2}{e^{x^2}}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{e^{x^2}-x^2}{e^{x^2}}=\frac{\infty}{\infty}=\xrightarrow{Aplicando\ L'Hopital}=\lim_{x\to\infty}\frac{2xe^{x^2}-2x}{2xe^{x^2}}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{2x\left(e^{x^2}-1\right)}{2xe^{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{e^{x^2}-1}{e^{x^2}}\lim_{x\to\infty}\frac{e^{x^2}}{e^{x^2}}-\lim_{x\to\infty}\frac{1}{e^{x^2}}=1-\frac{1}{\infty}=1-0=1$$

$Existe\ asíntota\ horizontal\ \ y=1\ cuando\ x\to\infty$

$$y=\lim_{x\to-\infty}\left(1-x^2e^{-x^2}\right)=\lim_{x\to\infty}\left[1-(-x)^2e^{-(-x)^2}\right]=\lim_{x\to\infty}\left[1-x^2e^{-x^2}\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{e^{x^2}-x^2}{e^{x^2}}=\frac{\infty}{\infty}=\xrightarrow{Aplicando\ L'Hopital}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{2xe^{x^2}-2x}{2xe^{x^2}}==\lim_{x\to\infty}\frac{2x\left(e^{x^2}-1\right)}{2xe^{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{e^{x^2}-1}{e^{x^2}}\lim_{x\to\infty}\frac{e^{x^2}}{e^{x^2}}-\lim_{x\to\infty}\frac{1}{e^{x^2}}=1-\frac{1}{\infty}=1-0=1$$

$Existe\ asíntota\ horizontal\ \ y=1\ cuando\ x\to-\infty$

1.B- Hallar los valores de a, b y c de forma que la función **f(x)** sea continua en el intervalo **[2 , -3]**, derivable en **(2 , -3)** y tal que **f(-2) = f(3)** $f(x)=\begin{cases} ax+bx^2 & si \quad -2\le x<0 \\ c+\sqrt{x+1} & si \quad 0\le x\le 3\end{cases}$

[2'5 puntos]

Continuidad

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=a\cdot 0+b\cdot 0^2=0 \\ f(0)=\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=c+\sqrt{0+1}=c+1 \end{cases} \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=0=f(0)=\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=c+1 \Rightarrow c+1=0 \Rightarrow c=-1$$

Derivabilidad

$$f'(x)=\begin{cases} a+2bx & si \quad -2<x<0 \\ \dfrac{1}{2\sqrt{x+1}} & si \quad 0<x<3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^-} f'(x)=a+2b\cdot 0=a \\ f(0)=\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{0+1}}=\dfrac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow a=\frac{1}{2}$$

$$\begin{cases} f(-2)=\dfrac{1}{2}\cdot(-2)+b\cdot(-2)^2=-1-2b \\ f(3)=-1+\sqrt{3+1}=-1+2=1 \end{cases} \Rightarrow -1-2b=1 \Rightarrow -2b=2 \Rightarrow b=\frac{2}{-2}=-1$$

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{x}{2}-x^2 & si \quad -2\le x<0 \\ -1+\sqrt{x+1} & si \quad 0\le x\le 3 \end{cases}$$

BLOQUE 2

2.A.- Determina el valor de **a** siendo **a > 0** para que el área limitada por la curva **y = x²** y la recta **y = ax** sea igual a $\frac{9}{2}$ **[2'5 puntos]**

$$Puntos\ de\ corte\ con\ OX \Rightarrow y=0 \Rightarrow \begin{cases} x^2=0 \Rightarrow x=0 \\ 0=ax \Rightarrow x=0 \end{cases}$$

$$Puntos\ de\ corte\ entre\ funciones \Rightarrow x^2=ax \Rightarrow x^2-ax=0 \Rightarrow (x-a)x=0 \Rightarrow \begin{cases} x-a=0 \Rightarrow x=a \\ x=0 \end{cases}$$

$$\frac{9}{2}=\int_0^a ax\,dx-\int_0^a x^2\,dx \Rightarrow \frac{9}{2}=a\cdot\frac{1}{2}\cdot\left[x^2\right]_0^a-\frac{1}{3}\cdot\left[x^3\right]_0^a \Rightarrow \frac{9}{2}=\frac{a}{2}\cdot\left(a^2-0^2\right)-\frac{1}{3}\cdot\left(a^3-0^3\right) \Rightarrow$$

$$\frac{9}{2}=\frac{a^3}{2}-\frac{a^3}{3} \Rightarrow \frac{9}{2}=\frac{3a^3-2a^3}{6} \Rightarrow 9=\frac{a^3}{3} \Rightarrow a^3=27 \Rightarrow a=\sqrt[3]{27}=3$$

2.B.- Calcular las siguientes integrales

$$i)\int (2x-1)\,Ln\,(x)\,dx \quad (1'25\ puntos) \quad y \quad ii)\int \frac{1-x}{1+4x^2}dx \quad (1'25\ puntos)$$

i)Método de Integración por partes

$$I=\int (2x-1)\,Ln\,(x)\,dx=(x^2-x)\,Ln\,(x)-\int (x^2-x)\frac{dx}{x}=(x^2-x)\,Ln\,(x)-\int (x-1)\,dx$$

$$\begin{cases} Ln\,(x)=u\Rightarrow \dfrac{dx}{x}=du \\ (2x-1)\,dx=dv\Rightarrow v=\int (2x-1)\,dx=2\cdot\dfrac{1}{2}\,x^2-x=x^2-x \end{cases}$$

$$I=(x^2-x)\,Ln\,(x)-\left(\frac{1}{2}\,x^2-x\right)=(x^2-x)\,Ln\,(x)-\frac{1}{2}\,x^2+x+K$$

ii)

$$I=\int \frac{1-x}{1+4x^2}\,dx=\int \frac{1}{1+4x^2}\,dx-\int \frac{x}{1+4x^2}\,dx=\int \frac{1}{1+(2x)^2}\,dx-\int \frac{\frac{dt}{8}}{t}=\int \frac{\frac{du}{2}}{1+u^2}-\frac{1}{8}\int \frac{dt}{t}$$

$$1+4x^2=t\Rightarrow 8x\,dx=dt\Rightarrow x\,dx=\frac{dt}{8} \qquad 2x=u\Rightarrow 2\,dx=du\Rightarrow dx=\frac{du}{2}$$

$$I=\frac{1}{2}\int \frac{du}{1+u^2}-\frac{1}{8}\,Ln\,t=\frac{1}{2}\cdot arc\ tg\ u-\frac{1}{8}\,Ln\,(1+4x^2)=\frac{1}{2}\cdot arc\ tg\ (2x)-\frac{1}{8}\,Ln\,(1+4x^2)+K$$

BLOQUE 3

3.A- Dada las matrices $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ y la identidad de orden 2, **I**

i) ¿Para que valores de $m\in\Re$ la matriz **A – mI** no tiene inversa? **[1’25 puntos]**
ii) Describir las matrices **X** de orden 2 x 2 que cumplen : **(A – 3I)X = 0 [1’25 puntos]**

i) Para que no halla inversa el determinante de la matriz es nulo

$$A-mI=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}-m\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2-m & 1 \\ 1 & 2-m \end{pmatrix}\Rightarrow |A-mI|=\begin{vmatrix} 2-m & 1 \\ 1 & 2-m \end{vmatrix}=0\Rightarrow$$

$$(2-m)^2-1=0\Rightarrow 4-4m+m^2-1=0\Rightarrow m^2-4m+3=0\Rightarrow \Delta=(-4)^2-4\cdot 1\cdot 3=16-12=4\geq 0\Rightarrow$$

$$m=\frac{4\pm\sqrt{4}}{2\cdot 1}\Rightarrow \begin{cases} m=\dfrac{4+2}{2}=3 \\ m=\dfrac{4-2}{2}=1 \end{cases}\Rightarrow Tendra\ inversa\ para\ \forall m\in\Re-\{1\,,\,3\}$$

ii)

$$(A-3I)X=0\Rightarrow A-3I=\begin{pmatrix} 2-3 & 1 \\ 1 & 2-3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} -a+c & -b+d \\ a-c & b-d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\Rightarrow \begin{cases} -a+c=0\Rightarrow a=c \\ -b+d=0\Rightarrow b=d \end{cases}\Rightarrow X=\begin{pmatrix} a & b \\ a & b \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \lambda & \mu \\ \lambda & \mu \end{pmatrix} \quad (\lambda\in\Re\,,\,\mu\in\Re)$$

3.B.- Se sabe que $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = -3$, calcula:

i) $\begin{vmatrix} 3a_1 & 3b_1 & 15c_1 \\ a_2 & b_2 & 5c_2 \\ a_3 & b_3 & 5c_3 \end{vmatrix}$ **[0'75 puntos]** ii) $\left|\left(-\frac{1}{3}\right)A\right|$ **[0'75 puntos]** iii) $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 - a_3 & b_2 - b_3 & c_2 - c_3 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$ **[1 punto]**

i)

$$\begin{vmatrix} 3a_1 & 3b_1 & 15c_1 \\ a_2 & b_2 & 5c_2 \\ a_3 & b_3 & 5c_3 \end{vmatrix} = 3 \cdot \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & 5c_1 \\ a_2 & b_2 & 5c_2 \\ a_3 & b_3 & 5c_3 \end{vmatrix} = 3 \cdot 5 \cdot \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 15 \cdot (-3) = -45$$

ii)

$$\left|\left(-\frac{1}{3}\right)A\right| = \left(-\frac{1}{3}\right)^3 \cdot |A| = -\frac{1}{27} \cdot (-3) = \frac{1}{9}$$

iii)

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_3 & b_3 & c_3 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = -3 - 0 \; (\textit{tienen dos filas iguales}) = -3$$

BLOQUE 4

4.A.- Calcular la ecuación de una recta que pasa por el punto de intersección del plano $\pi \equiv x + y - z + 6 = 0$ con la recta $r \equiv \begin{cases} x - 3y + 6 = 0 \\ -x + 3z + 3 = 0 \end{cases}$ y es paralela a la recta $s \equiv \dfrac{x-2}{3} = \dfrac{y}{-1} = z$ **[2'5 puntos]**

Hallaremos el punto **P** de corte verificando los puntos de **r** en el plano dado. Obtenido el punto hallaremos la recta **t** que tiene como vector director el de la recta **s**

$$r \equiv \begin{cases} x - 3y + 6 = 0 \\ -x + 3z + 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow -3y + 6 + 3z + 3 = 0 \Rightarrow 3y = 9 + 3z \Rightarrow y = 3 + z \Rightarrow x - 3\left(3 + z\right) + 6 = 0 \Rightarrow$$

$$x - 9 - 3z + 6 = 0 \Rightarrow x - 3 - 3z = 0 \Rightarrow x = 3 + 3z \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = 3 + 3\lambda \\ y = 3 + \lambda \\ z = \lambda \end{cases} \Rightarrow$$

$$Punto\ de\ int er sec cion\ P\ de\ la\ recta\ r\ con\ el\ \ plano\ \pi$$

$$3 + 3\lambda + 3 + \lambda - \lambda + 6 = 0 \Rightarrow 3\lambda + 12 = 0 \Rightarrow \lambda = -4 \Rightarrow P\begin{cases} x = 3 + 3\cdot\left(-4\right) = 3 - 12 = -9 \\ y = 3 + \left(-4\right) = -1 \\ z = -4 \end{cases} \Rightarrow P\left(-9\ ,-1\ ,-4\right)$$

$$Re cta\ t$$

$$\overrightarrow{v_t} = \overrightarrow{v_s} = \left(3\ ,-1\ ,1\right) \Rightarrow t = \frac{x+9}{3} = \frac{y+1}{-1} = z + 4$$

4.B.- Hallar la ecuación general del plano que pasa por el punto **P(-1 , 0 , 2)** y contiene a la recta $s \equiv \dfrac{x}{2} = \dfrac{y-1}{-3} = z + 2$ **[2'5 puntos]**

Para determinar el plano π contamos con el vector director de la recta **s**, con el vector formado por el punto **P** y un punto **S** cualquiera de la recta **s** (tomaremos el indicado en su ecuación) y por el vector que forma el punto **P** y el punto **G**, genérico del plano, estos tres vectores son coplanarios (están contenidos en el mismo plano) y por ello el vector **PG** es combinación lineal de los otros dos, así que el determinante de la matriz que forman los tres es nulo y la ecuación pedida.

$$S\left(0\ ,1\ ,-2\right)$$

$$\begin{cases} \overrightarrow{v_s} = \left(2\ ,-3\ ,1\right) \\ \overrightarrow{PS} = \left(0\ ,1\ ,-2\right) - \left(-1\ ,0\ ,2\right) = \left(1\ ,1\ ,-4\right) \\ \overrightarrow{PG} = \left(x\ ,y\ ,z\right) - \left(-1\ ,0\ ,2\right) = \left(x+1\ ,y\ ,z-2\right) \end{cases} \Rightarrow \pi \equiv \begin{vmatrix} x+1 & y & z-2 \\ 2 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -4 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$12\left(x+1\right) + y + \left(z-1\right) + 2\left(z-2\right) + 3\left(z-2\right) - \left(x+1\right) + 8y = 0 \Rightarrow 11\left(x+1\right) + 9y + 5\left(z-2\right) = 0$$

$$\pi \equiv 11x + 9y + 5z + 1 = 0$$